

ders das Xe noch zurückgehalten. Die beiden letzteren werden erst durch Erwärmen der Tierkohle auf Zimmertemperatur desorbiert. Die Messung des Xe erfolgte sowohl in Anwesenheit der rund 50 000-mal² größeren Ar-Menge wie auch ohne deren Gegenwart. In einer Messung wurde das Anwachsen des Xe beobachtet, nachdem die Kühlmischung von der Tierkohle entfernt worden war.

	129 132	131 132	134 132	136 132
Richardton				
Beobachter A	1,4 ±.1	.84 ±.04	.37 ±.02	.32 ±.02
Beobachter B	1.4 ±.1	.83 ±.04	.39 ±.02	.33 ±.02
	Xe ¹²⁹ Xe ¹³²	Xe ¹³¹ Xe ¹³²	Xe ¹³⁴ Xe ¹³²	Xe ¹³⁶ Xe ¹³²
Atmosphärisches Xenon ³	.98	.79	.39	.33

Tab. 1. Mittelwerte der gemessenen Signale relativ zum Signal auf der Masse 132 und die entsprechenden Isotopenverhältnisse von atmosphärischem Xenon. Die Auswertung der Schreiberstreifen erfolgte durch zwei vollständig unabhängige Personen, um Fehler durch subjektive Interpretation auszuschalten.

Abb. 1 a zeigt den Massenbereich zwischen den Massen 78 und 140, wie er sich in einem Blank-Run präsentierte, der dem Sample-Run etwa zwei Stunden vorausging. Abb. 1 c zeigt den selben Massenbereich im zweiten Extraktionsprozeß. Abb. 1 b dagegen zeigt diesen Massenbereich in Anwesenheit des extrahierten Kr und Xe, nachdem das Ar zum größten Teil abgetrennt wurde. Die asymmetrische Spitze der Masse 80 steht im Zusammenhang mit der verhältnismäßig großen Ar-Menge, die trotz der vorgängigen Abtrennung noch im System vorhanden war. Hg⁺⁺ nimmt während der gesamten Messungen zu. Der Ursprung der kleinen

² J. H. REYNOLDS, Phys. Rev. (Lett.) 4, 351 [1960].
³ A. O. NIER, Phys. Rev. 79, 450 [1950].

Störmasse in der Gegend der Masse 120 ist nicht geklärt. Sie ist innerhalb einer Gesamtmessung (12 bis 20 Stunden) annähernd konstant, variiert aber um einen Faktor 4 zwischen den fünf verschiedenen Messungen. Bei der Untersuchung des Chondriten Benton wurde ebenfalls nach Xe gesucht. Die Massenbereiche 81–86 und 128–136 unterschieden sich jedoch nicht wesentlich von den in Abb. 1 a und 1 c gezeigten. Daraus ergibt sich, daß Signale, die in diesen Bereichen bei Messungen an Richardton auftreten, eindeutig mit diesem verknüpft sind und nicht bei der Messung jedes Meteoriten auftreten. Auf die Bestimmung der absoluten Menge des Xe wurde verzichtet, da diese eine Beschickung der Apparatur mit atmosphärischem Xe vorausgesetzt hätte. Um mögliche Störungen durch einen etwaigen „Memory-Effekt“, zu vermeiden, wurde davon abgesehen. In den fünf unabhängigen Messungen wurden je 2–11 Spektren des interessierenden Massenbereiches registriert. Deren Beobachtung erstreckte sich teilweise über mehr als eine Stunde, und es konnten innerhalb der Fehlergrenzen keine Veränderungen festgestellt werden. Insbesondere waren keinerlei Anzeichen eines systematischen Ganges zu erkennen. In Tab. 1 sind die Mittelwerte der gemessenen Signale relativ zum Signal auf der Masse 132 angegeben, wie sie von zwei unabhängigen Beobachtern aus den Schreiberstreifen herausgelesen wurden. Die angegebenen Fehler sind die dreifachen Werte der mittleren quadratischen Abweichung, berechnet aus den fünf Einzelmessungen. Außer dem Verhältnis der Signale der Massen 129 und 132 stimmen alle Verhältnisse innerhalb der Meßgenauigkeit von 5–10% mit den entsprechenden Isotopenverhältnissen des atmosphärischen Xe überein. Der Umstand, daß das Verhältnis der Signale auf den Massen 129 und 132 von allen Änderungen im experimentellen Vorgehen unbeeinflusst blieb, kann nur damit erklärt werden, daß alle Signale durch entsprechende Xe-Ionen erzeugt wurden. Daraus schließen wir in guter Übereinstimmung mit REYNOLDS, dessen experimentelles Vorgehen von unserem in mancher Hinsicht verschieden ist, daß das Xe¹²⁹ in Richardton gegenüber atmosphärischem Xe um mindestens 40% angereichert ist.

Zur elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas bei hohen Temperaturen

Von H. WILHELM
TH Stuttgart,

Arbeitsgemeinschaft für Hochtemperaturforschung
(Prof. Dr. KLUGE, Prof. Dr. HÖCKER)

(Z. Naturforschg. 15 a, 749–751 [1960] ; eingegangen am 30. Januar 1960)

Es wird gezeigt, daß bei der Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas im Fall extrem hoher Temperaturen wellenmechanische Effekte zu berücksichtigen sind. Die kritische Temperatur, oberhalb welcher Abweichungen von den nach der klassischen Gaskinetik berechneten Werten der elektrischen Leit-

fähigkeit auftreten, ist proportional dem Quadrat der effektiven Ladungszahl des Plasmas.

A. Allgemeines

Die elektrische Leitfähigkeit σ_L eines idealisierten, völlig ionisierten Gases, in welchem die Elektron-Elektron-Wechselwirkung vernachlässigbar ist*, wurde u. a. von SPITZER¹ und SCHIRMER² auf klassischer Grundlage

* Sogenanntes LORENTZ-Gas, in welchem nur die Elektron–Ion-Wechselwirkung betrachtet wird.
¹ R. S. COHEN, L. SPITZER u. P. McR. RUTLY, Phys. Rev. 80, 230 [1950].
² H. SCHIRMER, Z. Phys. 142, 1 [1955].



durch Integration der BOLTZMANN-Gleichung berechnet. Für ein solches hypothetisches Plasma erweiterte SPITZER das Stoßintegral in der BOLTZMANN-Gleichung durch einen FOKKER-PLANCK-Term und erhielt

$$\sigma_L = (2 n_e e^2 / 3 m_e w^2) / \pi^{1/2} m_e^{1/2} Z e^2 \ln A, \quad (1)$$

während SCHIRMER für die Wahrscheinlichkeitsdichte in der BOLTZMANN-Gleichung die LORENTZsche Näherung³ benutzte und somit

$$\sigma_L = (2 n_e e^2 / 3 m_e w^2) \int_0^\infty L(v) v F_0 dv \quad (2)$$

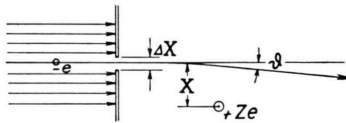
fand. Dabei bedeuten: $A = D/X_0$, $D = \text{DEBYE-Radius}$, $X_0 = \text{Stoßparameter}$, bei welchem das Elektron um 90° abgelenkt wird [$2(m_e v^2/2) = Z e^2/X_0$]; $w = (2 k T/m_e)^{1/2} = \text{wahrscheinlichste Elektronengeschwindigkeit}$; $F_0 = 4 \pi v^2 f_0$, $f_0 = e^{-(v/w)^2/\pi^{3/2} w^3} = \text{MAXWELL-Verteilung}$; $L(v) = (n_i Q_i)^{-1}$ mit $n_i = n_e/Z = \text{Anzahl der Ionen pro cm}^3$, $Q_i(v) = 2 \pi \int (1 - \cos \vartheta) I(\vartheta, v) \sin \vartheta d\vartheta$, $I(\vartheta, v) = \text{Streuintensität}$. Der Einfluß der Elektron-Elektron-Wechselwirkung wurde von oben zitierten Verfassern ebenfalls behandelt^{1, 4, 5}, ist aber für das Folgende nicht von unmittelbarem Interesse.

B. Elektrische Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen

Die klassische Stoßtheorie setzt die Existenz genau definierter Stoßparameter X voraus. Diese Annahme ist aber nur solange berechtigt, als die aus der HEISENBERG'schen Unschärferelation folgende Ungenauigkeit ΔX des Stoßparameters klein gegen diesen selbst ist, d. h.

$$\Delta X/X \ll 1. \quad (3)$$

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts betrachten wir folgendes idealisierte Experiment, bei welchem ein Elektron durch einen Spalt, der die Stoßparameterunschärfe ΔX zu messen gestattet, ausgeblendet wird und im COULOMB-Feld eines Atomkerns der Ladung Ze gestreut wird (s. Abb.). Durch den Stoß erhält das



Elektron einen Impuls in x -Richtung. Dieser ist für kleine Streuwinkel ϑ

$$p_x = K_x \Delta t = Z e^2 / X^2 \cdot 2 X / v = 2 Z e^2 / X v. \quad (4)$$

Als Unschärfe des Impulses in x -Richtung wollen wir im Grenzfall $\Delta p_x = p_x$ selbst akzeptieren und erhalten damit nach der Ungenauigkeitsrelation eine *minimale* Ungenauigkeit im Stoßparameter

$$\Delta X_{\min} = \hbar / p_x = \hbar X v / 2 Z e^2 = X v / 2 Z c \alpha$$

mit

$$\alpha = e^2 / \hbar c = 1/137. \quad (5)$$

Nach (3) und (5) hat man für den Gültigkeitsbereich der klassischen Stoßvorstellung

$$(\Delta X/X)_{\min} = v / 2 Z c \alpha \ll 1, \quad (6)$$

woraus sich wegen $m_e v^2/2 = 3 k T/2$ eine kritische Temperatur angeben läßt, oberhalb welcher die Streuung von Elektronen an Z -fach geladenen Ionen sich nicht mehr nach der klassischen Mechanik allein behandeln

läßt:

$$T_k = \frac{4}{3} \alpha^2 Z^2 m_e c^2 / k. \quad (7)$$

Für ein Plasma mit $Z=1$ ist z. B.:

$$T_k = 4,2 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{K}.$$

Zum gleichen, zunächst überraschenden Ergebnis, daß gerade bei hohen Temperaturen quantenmechanische Effekte auftreten, führt folgende Überlegung. Ein Maß für die Ausdehnung des Streuzentrums ist

$$2 X_0 = Z e^2 / (m_e v^2/2) \sim 1/T,$$

die reduzierte de-BROGLIE-Wellenlänge des Elektrons ist

$$\lambda_e = \hbar / m_e v \sim 1/T^{1/2},$$

daher $\lambda_e/2 X_0 \sim T^{1/2}$. Sobald $\lambda_e \geq 2 X_0$, ($T \geq T_k$), läßt sich die Elektronenstreuung nicht mehr im Partikelbild berechnen, da in diesem Temperaturbereich nur die Vorstellung der Beugung einer Elektronenwelle der Wellenlänge λ_e an einem Streuzentrum der Ausdehnung $2 X_0$ dem physikalischen Geschehen gerecht wird. T_k kann man daher ebenfalls aus der Ungleichung

$$\lambda_e = \hbar / m_e v \leq 2 X_0 = Z e^2 / (m_e v^2/2)$$

berechnen, wobei die Übereinstimmung mit (7) sofort ersichtlich ist.

In dem von SPITZER für die elektrische Leitfähigkeit gegebenen Ausdruck (1) ist für $T \geq T_k$ die klassische Größe $A = A_{kl}$ durch ihren im Bereich der Wellenaufassung geltenden Wert A_q zu ersetzen. Nach der Wellenmechanik findet die Streuung des Elektrons in Richtung ϑ in einer Entfernung $X_q \approx \hbar / (m_e v \vartheta)$ ⁶ vom Streuzentrum statt. Aus der Definition von A folgt damit $A_q/A_{kl} = 2 Z e^2 / \hbar v = 2 Z c \alpha / v = (Z^2 4,2 \cdot 10^5 / T)^{1/2}$. (8)

In der SPITZER'schen Formel ist also die klassisch berechnete Größe $A = D/X_{0kl}$ mit $(Z^2 4,2 \cdot 10^5 / T)^{1/2}$ zu multiplizieren, sobald $T \geq T_k$ ⁷. Mit $D^2 = k T / 4 \pi (1 + Z) n_e e^2$ erhält man

$$A_{kl} = (3/2 Z e^3) \cdot (k T)^{3/2} / [\pi n_e (1 + Z)]^{1/2}. \quad (9)$$

	$10^6 \text{ }^\circ\text{K}$	$10^7 \text{ }^\circ\text{K}$	$10^8 \text{ }^\circ\text{K}$
$\ln A_{kl}$	12,53	15,99	19,44
$\ln A_q$	12,10	14,40	16,70

Tab. 1. Werte von $\ln A_{kl}$ und $\ln A_q$ für $Z=1$ und $n_e = 10^{15} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$ nach (8) und (9).

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß SPITZER und Mitarbeiter in ihrer Originalarbeit¹ Formel (9) angeben, bei der Berechnung einzelner A -Werte aber den in „Physics of Fully Ionized Gases“⁸ abgeleiteten Ausdruck $A_{kl} = (3/2 Z e^3) \cdot (k T)^{3/2} / (\pi n_e)^{1/2}$ benützen.

Man erkennt an, daß bei Temperaturen bis zu $10^8 \text{ }^\circ\text{K}$, die man größenordnungsmäßig mit Stoßentladungen erreicht, quantenmechanische Effekte noch keinen wesent-

³ H. A. LORENTZ, Proc. Amst. Acad. Soc. **7**, 438 [1905].

⁴ L. SPITZER u. R. HÄRM, Phys. Rev. **89**, 977 [1953].

⁵ H. SCHIRMER u. J. FRIEDRICH, Z. Phys. **151**, 375 [1958].

⁶ E. J. WILLIAMS, Rev. Mod. Phys. **17**, 217 [1945].

⁷ R. MARSHAK, Ann. N.Y. Acad. Sci. **41**, 49 [1941].

⁸ L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Intersc. Publ. Inc., New York 1956.

lichen Einfluß haben. Temperaturabschätzungen nach (1) aus Leitfähigkeitsbestimmungen⁹ bleiben daher in diesem Temperaturbereich unverändert.

Problematischer als die quantenmechanische Korrektur ist die Wahl des DEBYE-Radius D als oberste Grenze des Stoßparameters. Da $D \sim T^{1/2}$, werden sich bei hohen Temperaturen die Elektronenwolken benachbarter Ionen überdecken. Berücksichtigt man diesen Überdeckungseffekt, so ist infolge elektrostatischer Abschirmung eine Abnahme des DEBYE-Radius bei hohen Temperaturen zu erwarten¹⁰. Da der mittlere Abstand zweier unmittelbar benachbarter Ionen von der Größenordnung $d = 1/n_i^{1/3}$ ist, hat man mit einer Überdeckung der DEBYE-Sphären zu rechnen, sobald $D \gtrsim 1/2 d$, d. h. die Plasmatemperatur

$$T \gtrsim \frac{\pi e^2}{k} (1+Z) Z^{1/3} n_i^{1/3} \approx 5 \cdot 10^{-3} (1+Z) Z^{1/3} n_i^{1/3} \quad (13)$$

ist. Bei den interessierenden Ionendichten n_i von 10^{10} bis $10^{18} [\text{cm}^{-3}]$ und Plasmatemperaturen $T \gtrsim 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$ ist (13) erfüllt. Demnach liegt eine Überlappung der Elektronenwolken benachbarter Ionen vor.

Man sollte daher bei hohen Temperaturen das COULOMB-Feld nicht am DEBYE-Radius abschneiden. Statt dessen empfiehlt es sich nach FINKELNBURG und MAECKER¹¹, das COULOMB-Feld bei $1/4$ des Abstands zweier benachbarter Ionen abzuschneiden, wobei man zu einer Übereinstimmung mit Messungen bei $5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ kommt^{12, 13}. Da die Abschneiddistanz bei der Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit nur logarithmisch eingeht, ist der damit verbundene Fehler ebenfalls nicht von wesentlicher Bedeutung.

Die von SCHIRMER gegebene Leitfähigkeitsformel (2) ist ebenfalls bei hohen Temperaturen anwendbar. Man hat lediglich die Streuintensität $I(\vartheta, v)$ nach wellenmechanischen Methoden zu berechnen. Die Methode der Partialwellen¹⁴ ist für $\lambda_e \geq 2 X_0$ gültig und kommt daher im Bereich $T \geq T_k$ in Betracht, während es hier

nicht zulässig ist, Streuintensität bzw. differentielle Wirkungsquerschnitte nach der BORNSchen Näherung zu berechnen, da diese nur für $\lambda_e \ll 2 X_0$ gültig ist.

C. Zusammenhang zwischen den Leitfähigkeitsformeln von Spitzer und Schirmer

Mit $I(\vartheta, v) = Z^2 e^4 / 4 m_e^2 v^4 \sin^4 \vartheta / 2$ (RUTHERFORD) und $\sin \vartheta_0 / 2 \approx \text{tg } \vartheta_0 / 2 = Z e^2 / m_e v^2 D$, D = DEBYE-Radius als oberste Grenze des Stoßparameters⁸, hat man für die Streuung von Elektronen an dem COULOMB-Potential $V = Z e^2 / r$ als Transportquerschnitt

$$\begin{aligned} Q_i(v) &= 2 \pi \int_{\vartheta_0}^{\pi} I(\vartheta, v) (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= [\pi Z^2 e^4 / (2 m_e^2 v^4)] \int_{\vartheta_0}^{\pi} [(1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta / \sin^4 \vartheta / 2] d\vartheta \\ &= - [4 \pi Z^2 e^4 / (m_e^2 v^4)] \ln \sin \vartheta_0 / 2 \quad (10) \\ &= 4 \pi Z^2 e^4 \ln (m_e v^2 D / Z e^2) / m_e^2 v^4 = 4 \pi Z^2 e^4 \ln \Lambda / m_e^2 v^4 \end{aligned}$$

und nach der SCHIRMERSchen Formel (2) mit

$$\begin{aligned} L(v) &= [n_i Q_i(v)]^{-1} \\ \sigma_L &= (2 m_e w^3 / 3 \pi^{1/2} Z e^2) n_e / Z n_i \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} (v/w)^7 (1/\ln \Lambda) e^{-(v/w)^2} d(v/w). \end{aligned} \quad (11)$$

Vernachlässigt man die v -Abhängigkeit von $\ln \Lambda(v)$, so erhält man durch Integration von (11) mit

$$\begin{aligned} w &= (2 k T / m_e)^{1/2} \\ \sigma_L &= 2 (2 k T)^{3/2} / \pi^{1/2} m_e^{1/2} Z e^2 \ln \Lambda, \end{aligned}$$

was mit der SPITZERSchen Formel (1) identisch ist.

Der Anstoß zu diesen Rechnungen erfolgte bei einer Diskussion mit H. SCHIRMER, für die an dieser Stelle herzlich gedankt sei.

⁹ K. H. HÖCKER u. W. KLUGE, OHmsche Aufheizung vollionisierter Plasmen hoher Dichte I. — W. KLUGE u. K. H. HÖCKER, OHmsche Aufheizung vollionisierter Plasmen hoher Dichte II. Fourth Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala 1959.

¹⁰ L. WALDMANN, private Mitteilung.

¹¹ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, in: Handbuch d. Physik, Bd. 22, Springer-Verlag, Berlin 1956.

¹² H. MAECKER u. TH. PETERS, Z. Phys. Chem. **198**, 318 [1951].

¹³ H. MAECKER, TH. PETERS u. H. SCHENK, Z. Phys. **140**, 119 [1955].

¹⁴ L. I. SCHIFF, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York 1955.